$U_{n+2} \le U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} e^{-\frac{1}{4(n+1)}}$ d'où $U_{n+2} \le U_1 e^{\frac{-1}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1} \le U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

3°/ * D'après la relation (1) on a : pour tout $k \ge 1$:

$Log(k+1) - \log k \le \frac{1}{k} - \frac{1}{4k^2}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} Log(k+1) - \sum_{k=1}^{n} Logk \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow Log(2) + Log(3) + \ldots + Log(n) + Log(n+1) - -Log(2) - Log(3) - \ldots . -$

$-Log(n) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ en simplifiant on obtient donc

$Log(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

* D'après **B**- 2°/ on a : $U_{n+1} \le U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

or $Log(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

d'où $-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le \frac{-1}{4}Log(n+1) - \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \le -\frac{1}{4}Log(n+1)$

(car $-\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 0$) $\Rightarrow U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \le U_1 e^{-\frac{1}{4}Log(n+1)}$

Il en résulte que $U_{n+1} \le U_1 e^{-\frac{1}{4}Log(n+1)}$

4°/ Il est évident que la suite (U_n) est positive et d'après **B** - 3°/ on a

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 \le U_n \le U_1 e^{-\frac{1}{4}Log(n+1)}$ or $\lim_{n\to+\infty} U_1 e^{-\frac{1}{4}Log(n+1)} = 0$

d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ ce qui prouve que la suite (U_n) converge vers 0.